Titel des Vortrages

Zur Messung der Produktivität einer Volkswirtschaft

Jean-François Emmenegger*, Hassan Ahmed Nour Eldin**,
*ehemaliges Departement für Quantitative Wirtschaftsforschung,
Universität Freiburg,
Boulevard de Pérolles 90 - 1700 Fribourg, Schweiz,
e-mail : jean-francois.emmenegger@unifr.ch,
**Lehrstuhl für automatische Kontrolle und technische Kybernetik,
Universität Wuppertal, Deutschland,
eldin@uni-wuppertal.de

12. Input-Output Workshop, Universität Osnabrück, Deutschland,
12.-13.3.2020

Input-Output Tabellen und Sraffa Modell (1)

- **Piero Sraffa (1898-1983)** und die kapitaltheoretische Kontroverse (P. A. Samuelson, 1966, "A summing up"),
- Ausgehend vom Überschussertrag Y als Summe von Profit P und Löhne W, $Y = P + W$, gelangt man durch Herunterbrechen der Gesamtbilanz $X = K + Y$ in Produkte zum Preismodell als Eigenwertpoblem,

$$\begin{aligned} &\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d}, \mathbf{S}'\mathbf{p}(1+R) = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{C}'\mathbf{p}(1+R) = \mathbf{p}, \\ &K + Y = \mathbf{e}'(\mathbf{S}'\mathbf{p}) + \mathbf{e}'(\mathbf{S}'\mathbf{p})R = \mathbf{e}'(\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}) = X, \end{aligned} \tag{1}$$

- Eigenwerte weisen auf die Existenz einer Frequenz hin, das heisst einer Periode, die hier das Jahr ist,
- Input-Output Tabellen stehen am Ende einer Periode,
- Die Verbindung der Input-Output Tabellen von **Wassily Leontief (1906-1999)** und des Preismodelles von Sraffa bedeutet, dass man ein dynamisches System bekommt.

Input-Output Tabellen (2)

Aufkommen Gütergruppen (CPA)	**Verwendung** Produktionsbereiche (NACE) S_1	S_2	$\ldots$	S_j	$\ldots$	S_n	letzte Verwendung von Gütern	gesamte Verwendung von Gütern
S_1	z_{11}	z_{12}	$\ldots$	z_{1j}	$\ldots$	z_{1n}	f_1	x_1
S_2	z_{21}	z_{22}	$\ldots$	z_{2j}	$\ldots$	z_{2n}	f_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_i	z_{i1}	z_{i2}	$\ldots$	z_{ij}	$\ldots$	z_{in}	f_i	x_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	z_{n1}	z_{n2}	$\ldots$	z_{nj}	$\ldots$	z_{nn}	f_n	x_n
Wertschöpfung	v_1	v_2	$\ldots$	v_j	$\ldots$	v_n	$V = F$	
gesamtes Aufkommen	x_1	x_2	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n		X

TABLE – Input-Output Tabellen (I-O-Tabellen)

Matrizen und Vektoren(3)

- semi-positive quadratische $n \times n$ *Matrix der Vorleistungsverflechtungen*, (Warenflussmatrix) $\mathbf{Z} \geq \mathbf{0}$
- positiver $n \times 1$ Vektor der letzten Verwendung $\mathbf{f} = (f_j) > \mathbf{o}$
- Man berechnet den Vektor der gesamten Verwendung $\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{e} + \mathbf{f} > \mathbf{o}$,
- sowie die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}$.

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} > \mathbf{o},} \tag{2}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{f} > \mathbf{o}, \tag{3}$$

- die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ besitzt die Frobeniuszahl $0 < \lambda_A < 1$, die Leontief Inverse $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
- Kreislaufwirtschaft : Weizen : Periode $T = 1$ Jahr und Frequenz $\nu = 1/T = 1/Jahr$; Fleisch aus Rinderzucht : Periode $T = 15$ Jahre, Frequenz $\nu = 1/(15\,Jahre)$.

Erweiterung auf Messungen in physischen Einheiten (4)

- 4 Attribute pro Gütergruppe : q_i, p_i, $x_i = p_i q_i$, e_i, $i = 1, ..., n$,
- Vektoren : $\mathbf{q} = [q_1, ..., q_n]'$ für die Quantitäten, $\mathbf{p} = [p_1, .., p_n]'$ für die Preise, $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} = [x_1, .., x_n]'$ für die Werte und $\mathbf{e} = [1, .., 1]'$ für die Objekte,
- Zeilensummen : $\mathbf{x}_I = \mathbf{Z}\mathbf{e}$, Spaltensummen : $\mathbf{y}_I = \mathbf{Z}'\mathbf{e}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{x}_I + \mathbf{f} = \mathbf{y}_I + \mathbf{v} = \mathbf{Z}'\mathbf{e} + \mathbf{v} = \mathbf{y}. \qquad (4)$$

- Warenfluss s_{ij} in physischen Termen : $z_{ij} = p_i s_{ij}$ in Matrixform : $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S}$
- *Koeffizientenmatrixen* $\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$ und $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}$
- Vektor der letzten Verwendung $\mathbf{f} > \mathbf{o}$, Überschussvektor $\mathbf{d} > \mathbf{o}$
- $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{d} > \mathbf{o}$, $\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d} > \mathbf{o}$
- *Zirkulationskapital* : $K = \mathbf{e}'(\mathbf{S}'\mathbf{p})$, Wert der gesamten Verwendung : $X = \mathbf{e}'(\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}) = K(1+R)$, das Volkseinkommen (ungefähr GDP) : $Y = X - K = R \cdot K$.

$$\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d}, \quad \mathbf{S}'\mathbf{p}(1+R) = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} = \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}'\mathbf{p}(1+R) = \mathbf{p}. \qquad (5)$$

Die Ergiebigkeit (5)

Lemma : *(Siehe Emmenegger et al., 2020) Aus der Input-Output-Tabelle einer Volkswirtschaft berechnet man die Ergiebigkeit R als Skalarprodukt des normierten Rechtseigenvektors $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{Z}\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_1'\mathbf{e} = 1$, und des Vektors $\mathbf{v}$ der gesamten Wertschöpfung, die man von der λ_F-normierten Vorleistungsverflechtungsmatrix $\mathbf{Z}$ erhält. Die Frobeniuszahlen der Matrizen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{A}$ sind identisch und gleich dem Quotienten der Skalarprodukte $\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I$ und $\mathbf{s}_1'\mathbf{y}$,*

$$R = \mathbf{s}_1'\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda_C} - 1, \qquad \lambda_C = \lambda_A = (\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I)/(\mathbf{s}_1'\mathbf{y}) = \frac{1}{1+R}. \tag{6}$$

Beweis : $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ sind ähnlich und haben gleiche Frobeniuszahlen. Mit $\lambda_C = 1/(1+R)$ ergibt sich das Sraffa Preismodell $\mathbf{S}'\mathbf{p} = \lambda_C\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}$, respektive $\mathbf{C}'\mathbf{p} = \lambda_C\mathbf{p}$, $\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$. Man berechnet $\mathbf{Z}' = \mathbf{S}'\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{C}'\hat{\mathbf{p}}$ und man erhält $\mathbf{y}_I = \mathbf{Z}'\mathbf{e} = \mathbf{S}'\hat{\mathbf{p}}\mathbf{e} = \mathbf{S}'\mathbf{p}$. Es ergibt sich :
$1 = \mathbf{s}_1'\mathbf{e} = (\mathbf{s}_1'\mathbf{Z}')\mathbf{e} = \mathbf{s}_1'(\mathbf{Z}'\mathbf{e}) = \mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I = 1$. Also folgt mit dem Sraffa Preismodell : $\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I = \mathbf{s}_1'\mathbf{S}'\mathbf{p} = \mathbf{s}_1'\,(\lambda_C\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}) = \lambda_C\,(\mathbf{s}_1'\mathbf{y}) = \lambda_C\,\mathbf{s}_1'(\mathbf{y}_I + \mathbf{v}) = \lambda_C(\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I + \mathbf{s}_1'\mathbf{v}) = \lambda_C(1 + \mathbf{s}_1'\mathbf{v}) = \lambda_C\mathbf{s}_1'\mathbf{y} = 1$. Durch Vergleich von $\lambda_C = 1/(1+R)$ und $\lambda_C = (\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I)/(\mathbf{s}_1'\mathbf{y})$ ergibt dies $R = \mathbf{s}_1'\mathbf{v}$. ▲

Beispiel : Ergiebigkeit (6)

Beispiel *Man betrachte eine Ökonomie bestehend aus $n = 2$ Sektoren, von der man folgende Matrizen und Vektoren kennt,*

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Man berechne : $\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d}$, $\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$, die Frobeniuszahl $\lambda_C > 0$, die Ergiebigkeit $R = (\frac{1}{\lambda_C}) - 1$ und den Preiseigenvektor $\mathbf{p} = [1, p_2]'$ der Matrix $\mathbf{C}$. Dann $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S}$, die Frobeniuszahl λ_F, sowie die λ_F-normierten Matrizen $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{S}$, zugehörige Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}_I$, $\mathbf{y}_I$ und $\mathbf{v}$, den normierten Rechtseigenvektor $\mathbf{s}_1$ von $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}'\mathbf{e} = 1$. Man überprüft $\lambda_C = (\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I)/(\mathbf{s}_1'\mathbf{y})$, $R = \mathbf{s}_1'\mathbf{v}$. Man berechne $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\mathbf{x}^{-1}$ und überprüfe, die Gleichheit der Frobeniuszahlen $\lambda_A = \lambda_C = (2/3)$.

Lösung des Beispiels :

$$\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Beispiel : Frobeniuszahl λ_F, λ_F-Normierung, Vektoren (7)

Frobeniuszahl von $\mathbf{C}$ ist $\lambda_C = 2/3$, die Ergiebigkeit ist $R = (1/\lambda_C) - 1) = 1/2$, der Preiseigenvektor $\mathbf{p} = [1, 3]'$, die Frobeniuszahl von $\mathbf{Z}$ ist $\lambda_F = 8.2729$.
Dann berechnet man die λ_F-normierten Matrizen $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{S}$,

$$\mathbf{Z} \;\Rightarrow\; \mathbf{Z} = \frac{1}{\lambda_F}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} \;\Rightarrow\; \mathbf{S} = \frac{1}{\lambda_F}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

λ_F-normierten Matrizen und Vektoren :

$$\mathbf{x}_I = \frac{1}{8.273}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.846 \\ 1.088 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_I = \frac{1}{8.273}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.725 \\ 1.208 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Die λ_F-Normierung beeinflusst die Matrix $\mathbf{C}$ nicht, normierte Rechts-Eigenvektoren von $\mathbf{Z}$: $\mathbf{s}_1 = [0.43127, 0.56873]'$,

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ze}+\mathbf{f} = \frac{1}{8.273}(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1.088 \\ 1.813 \end{bmatrix} = \mathbf{y},\; \mathbf{v} = \mathbf{y}-\mathbf{y}_I = \begin{bmatrix} 0.363 \\ 0.604 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Frobeniuszahl λ_C, Ergiebigkeit (8)

Nun berechnet man :

$$\lambda_C = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_\mathbf{I}}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}} = \frac{\begin{bmatrix}0.43127 & 0.56873\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.72508\\1.20847\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0.43127 & 0.56873\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.08762\\1.81271\end{bmatrix}} = \frac{2}{3},\;\; R = \mathbf{s}_1'\mathbf{v} = \mathbf{s}_1'\begin{bmatrix}0.36254\\0.60424\end{bmatrix} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 4\\3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & 0\\0 & \frac{1}{15}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{15}\\\frac{1}{3} & \frac{6}{15}\end{bmatrix}, \tag{12}$$

Man berechnet das charakteristische Polynom

$P_2(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - (11/15)\lambda + (2/45)$

und berechnet gleiche Frobeniuszahlen von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$, $\lambda_A = \lambda_C = (2/3)$, bestätigend dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ ähnlich sind. ▲

Deutschland, Österreich, Schweiz (9)

Rubrik	Deutschland	Österreich	Schweiz
Jahr	2013	2015	2014
Verflechtungsmatrix	72×72	65×65	49×49
Laufende Nr.			
Matrix der Verwendungen	72×12	65×15	49×24
Wertschöpfungsmatrix	10×72	16×65	4×49

Länder	letzte Verwendung von Gütern				Import	Ergiebigkeit
	Konsum der Haushalte C	Gesamtinvestitionen I	Staatsausgaben G	Export E	M	R
D (EURO)	1'472'436	551'462	593'728	1'257'691	1'049'077	0.6771
A (EURO)	188'848	81'955	68'033	167'908	162'473	0.7043
CH (CHF)	345'035	158'682	77'777	351'212	282'987	1.1518
1 € = 1.15 CHF						

TABLE – Kenngrössen der VGR und die Ergiebigkeit

Schlussfolgerungen (10)

- Man betrachtet die Matrix $\mathbf{Z} \geq \mathbf{0}$ und den Vektor der letzten Verwendung $\mathbf{f} > \mathbf{o}$, welche beide λ_F-normiert sind, $\mathbf{s}_1 = \mathbf{Z}\mathbf{s}_1$. Man berechnet : $\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{y}_I + \mathbf{v} = \mathbf{Z}'\mathbf{e} + \mathbf{v} = \mathbf{y}$,
- Mit $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_I$ ist die Ergiebigkeit dieser Wirtschaft gleich : $R = \mathbf{s}_1'\mathbf{v}$,
- Die Frobeniuszahlen der ähnlichen Koeffizintenmatrizen $\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$ und $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}$ sind gleich. Es gilt : $\lambda_A = \lambda_C = \frac{\mathbf{s}_1\mathbf{y}_I}{\mathbf{s}_1\mathbf{y}} = \frac{1}{1+R} < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lambda_C} - 1$,
- Mit gegebener Matrix $\mathbf{S} \geq \mathbf{0}$ und Vektor $\mathbf{d} > \mathbf{o}$, $\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d}$ ist R auch die Ergiebigkeit von Sraffa's Preismodell $\mathbf{S}'\mathbf{p}(1 + R) = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} = \mathbf{x} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{C}'\mathbf{p}(1 + R) = \mathbf{p}$, von welchem der Preisvektor $\mathbf{p}$ berechnet werden kann. Es gibt die Rückkoppelung zu $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S}$ und $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}$.